2013 Multi-University Training Contest 6 题解

麻省理工学院　顾昱洲

目录

A Cut Pieces

首先注意到独立性：令c_i为第i块的颜色，那么对于任意的i, 当$c_i \neq c_{i+1}$时，对总答案的贡献为1，否则为0。在$1 \leq c_i \leq a_i$且$1 \leq c_{i+1} \leq a_{i+1}$时，总方案数的$1/\max\{a_i, a_{i+1}\}$对答案贡献为0。因此，答案为$(1-\sum 1/\max\{a_i, a_{i+1}\})n\prod a_i$。

要求最大化答案，即为最小化$\sum 1/\max\{a_i, a_{i+1}\}$。注意到：

1. 当n为偶数时，最大的$n/2$个a_i对答案最多做出2次贡献；

2. 当n为奇数时，最大的$\lfloor n/2 \rfloor$个a_i对答案最多做出2次贡献，且第$\lceil n/2 \rceil$大的a_i对答案最多做出一次贡献。

不妨假设原序列中$a_i \leq a_{i+1}$，那么当序列为$a_1, a_n, a_2, a_{n-1} \ldots$时，以上最值取得。因此可以用这个序列计算答案。

注意到$\frac{\prod a_i}{a_k} = (\prod_{i<k} a_i)(\prod_{i>k} a_i)$是两个区间的积，因此可以不需要求逆元。

总时间复杂度$O(n)$。

B Evaluation

$$
\begin{aligned}
F_{x_k} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (bc^{2k}+d)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{i} (bc^{2k})^j d^{i-j} \binom{i}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (bc^{2k})^j j!^{-1} \sum_{i=j}^{n-1} a_i d^{i-j} i! (i-j)!^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (bc^{2k})^j j!^{-1} \sum_{i=0}^{n-1-j} a_{n-1-i}(n-1-i)! d^{n-1-j-i}(n-1-j-i)!^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (bc^{2k})^j j!^{-1} p_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} b^j j!^{-1} p_j c^{2jk} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} b^j j!^{-1} p_j c^{j^2} c^{k^2} c^{-(k-j)^2} \\
&= c^{k^2} \sum_{j=0}^{n-1} b^j j!^{-1} p_j c^{j^2} c^{-(k-j)^2} \\
&= c^{k^2} q_k
\end{aligned}
$$

其中$p_j = \sum_{i=0}^{n-1-j} a_{n-1-i}(n-1-i)! d^{n-1-j-i}(n-1-j-i)!^{-1}$，$q_k = \sum_{j=0}^{n-1} b^j j!^{-1} p_j c^{j^2} c^{-(k-j)^2}$，显然都是卷积，因此可以用FFT解决。

答案模$P=10^6+3$，是个质数。并且，nP^2在long long范围内。我们取两个10^9级别的质数P_1和P_2，分别用FFT求得模它们的结果，然后用CRT合并。

时间复杂度$O(n\log n)$。

C Find Permutation

从$a_i=i$和$c_i=i$开始构造。从小到大枚举k，我们通过调整a和c，使得$c_i-a_i(i<k)$不变，且$c_k-a_k=b_k$。对于所有$i>k$，我们并不关心其值。显然操作结束之后得到一个正确答案。

假设我们当前处理k。初始时我们令$i=k$，j为大于k的任意值。每一次操作，我们找$a_l=c_i-b_i$。若$i=l$，则结束；否则交换a_l和a_i。若$l>k$，那么结束；否则令$i=l$，然后交换c_i与c_j，继续处理直到该轮结束。

可以证明该算法不会出现死循环。

因为输入数据是随机的，所以处理k时期望操作$\frac{n}{k}$次。(没有严格证明。)总时间复杂度$O(n\log n)$。

D Integer Partition

五边形数定理：$Q(x)=\prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k x^{k(3k-1)/2}$。

记$p_k(n)$为所求答案，$p(n)=p_{+\infty}(n)$，$P_k(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_k(n)x^n$以及$P(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(n)x^n$。

注意到$P(x)=\prod_{i=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x^{ni}=\prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{1-x^i}=\frac{1}{Q(x)}$。

即$P(x)Q(x)=1$。以此我们可以在$O(n^{1.5})$的时间内求出$p(1),\ldots,p(n)$。

又，$P_k(x)=\prod_{i=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}x^{ni}=\prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1-x^{ki}}{1-x^i}=\frac{Q(x^k)}{Q(x)}=Q(x^k)P(x)$。

预处理之后，每次询问可以在$O(n^{0.5})$的时间内回答。

总时间复杂度$O(n^{1.5})$。

E Liveness Analysis

一个简单的想法是启发式合并。难点在于如何处理并非在两边都出现过的变量。添加一个offset，并相应维护，就可以了。

递归似乎会爆栈。时间复杂度$O(n\log^2 n)$。

F Mathematical Olympiad

枚举支点，极角排序，建图。时间复杂度$O(n^2)$。

G Message Passing

可以归纳证明，最优方案一定是先所有人的信息集中到某一个人，然后再将信息扩散到所有人。

枚举中心人物之后，最优方案数即为拓扑排序数的平方。DP可以求出以每个人为根的拓扑排序数。时间复杂度$O(n)$。需要稍微考虑一下如何只使用$O(1)$的逆元。

H MU Puzzle

首先，所有合法串以M开始且$I+3U$模6余4或2；其次，$I+3U$模6余4或2的串均可以达到(先扩展出很多I，然后变换出U，以及删掉多余的I)。仅有的反例是MI。

I Plane Partition

这题有一个很优美的做法，但是比直接DP差。

J Triangulation

注意到，如果一个点已经连了边，那么在这个点上连另一条边等价于自杀。因此不会出现这样的情况。

然后问题转化为Dawson's Kayles。可以打表找循环。循环节是34。

K Unshuffle

首先，如果分成两个序列，一定存在一种分法，使得第一个序列在原序列中的下标小于第二个序列中的对应的位置的在原序列中的下标。

因此，假设一个颜色出现了4次，位置分别是a, b, c, d。那么只可能有两种情况：

1. a和b在第一个序列中，c和d在第二个序列中。此时我们称a与c对应，b与d对应；
2. a和c在第一个序列中，b和d在第二个序列中。此时我们称a与b对应，c与d对应。

如果我们已经确定了所有下标的对应关系，并且满足之前提到的性质，那么一定是一个合法的解。

因此，找出互斥的情况，做2-SAT。

时间复杂度$O(n^2)$。